

2016年熊本地震における通潤橋の被災メカニズム分析

京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻 古川愛子・好川浩輝・清野純史

Study on Damage Mechanism on Tsujun Bridge due to 2016 Kumamoto Earthquake

Aiko FURUKAWA, Hiroki YOSHIKAWA and Junji Kiyono
Kyoto University

Abstract Tsujun bridge is a stone arch bridge in Kumamoto Prefecture, which has been designated as an important cultural property of Japan. Tsujun bridge suffered slight damage during 2016 Kumamoto earthquake. No stones fell down, but wall stones were pushed out in the transverse direction of the bridge. Moreover, cracks were found in the soil which was filled between stone canals and wall stones. Those damages were found not in the central part of the stone arch but between the arch end and the bridge end. This study aims to investigate the damage mechanism of Tsujun bridge due to Kumamoto earthquake. First, microtremor observation was conducted at Tsujun bridge and at the nearest ground motion observation site (K-NET YABE). The natural frequencies of the bridge and surround ground was estimated, and H/V spectral ratios at Tsujun bridge and the ground motion observation site was obtained. By comparing H/V spectra ratios, it was found that two sites have different vibration characteristic. Therefore, ground motions for Tsujun bridge was estimated using observed motion record and H/V spectra ratios. Next, an analytical model of Tsujun bridge was created based on the observed natural frequencies. Then, the seismic response of Tsujun bridge was simulated using the refined distinct element method. Using the created analytical model and estimated ground motion, the actual situation that observed damage was not found in the central part of the stone arch but between the arch end and the bridge end could be simulated, and its reason was explained.

Key Words : Tujun bridge, stone bridge, failure mechanism, 2016 Kumamoto earthquake, refined DEM

1. はじめに

重要文化財に指定されている通潤橋は、熊本県上益城郡山都町に位置し、緑川水系五老ヶ滝川に架かる石造アーチ式水路橋である(図1(a))。同橋は1854年に白糸台地の用水確保および新田造成を目的として建造され、橋上には逆サイフォンの原理を利用した3本の石製の通水管が通されている。通水管は図1(b)に示すような石管を多数つなぎ合わせた構造となっており、石管同士をつなぎ目地材として独自の漆喰工法が用いられている。通水管同士および通水管と壁石の間の隙間には図1(c)のように盛土が敷き詰められており、同橋は通水路でありながら上を人が通ることもできる¹⁾。

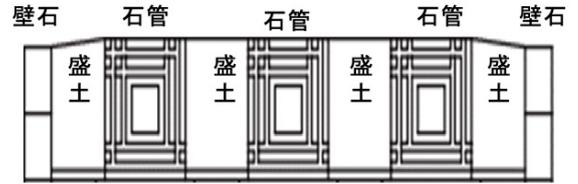
2016年4月14日、16日に発生した熊本地震において、通潤橋は崩壊や石材が落下する等の被害は免れたが、通水管からの漏水の発生や、図2(a)に見られるような壁石のはらみ出しや盛土の亀裂が確認された²⁾。図2(b)は壁石のはらみ出しの大きさのコンター図であり、地震前(2013年)と地震後(2016年)の3次元計測結果の差分によって求められたものである³⁾。同図では、赤色がはらみ出し量の大きいエリアであり、アーチ中央部では壁石のはらみ出しは小さく、むしろアーチ端部から橋の端部の間ではらみ出しが発生していることが分かる。はらみ出しの大きさは上流側の右岸側で最大で約15cmとなっている。図2(c)は盛土の亀裂の状況であり、赤線で示した部分が亀裂の発生箇所である⁴⁾。同図から、



(a) 上流側からの外観



(b) 石管



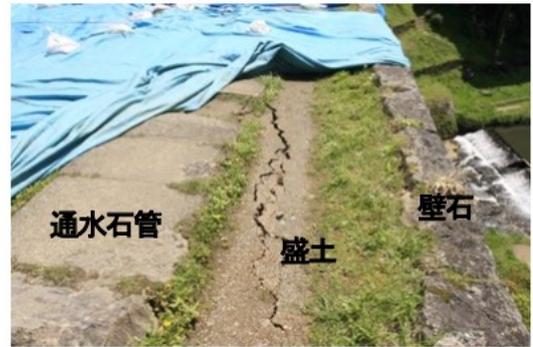
(c) 橋軸直角方向の上面の断面図 (文献¹) に加筆

図1 通潤橋

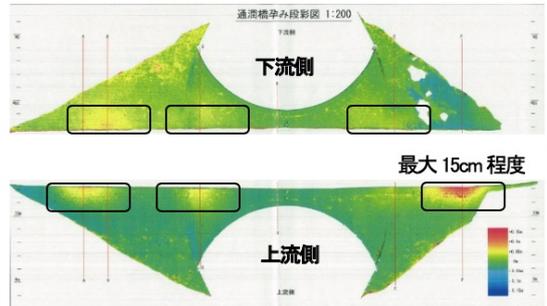
盛土の亀裂もアーチ中央部では発生しておらず、アーチ端部と橋端部の間で亀裂が進行したことが分かる。また、中央2列の盛土では亀裂が発生せず、外側2列の盛土にのみ亀裂が入ったことも読み取れる。亀裂の大きさは幅1~2cm程度、深さは深いところで30cm程度であったと報告されている⁴⁾。

熊本地震による通潤橋の被害について検討した研究事例は少ない。伊津野ら⁵⁾は橋上および周辺地盤における微動計測と、周辺地盤の簡易貫入試験を実施し、通潤橋の固有周期、減衰定数、支持地盤の固さを推定している。1次固有振動特性に基づき、通潤橋を線形1自由度系でモデル化し、通潤橋から約0.9km離れた防災科学技術研究所の全国強震観測網 K-NET (Kyoshin Net)⁶⁾の観測点 (K-NET 矢部) での観測地震動を入力した地震応答解析を実施している。萩原ら⁷⁾は、通潤橋の石積み部分だけをモデル化し、3次元有限要素法を用いて線形地震応答解析を行っている。入力地震動として、K-NET 矢部の記録を用いている。解析結果より、橋軸直角方向の最大変位はアーチ中央部で発生し、通水管のせん断応力および直応力もアーチ中央部で大きな値を示すと述べている。しかし実際の被害は、前述の通り、壁面のはらみ出しも盛土の亀裂も、アーチ中央部よりも橋の端部寄りで発生している。解析結果と実被害が合わない理由として、石橋の側方地盤をモデル化していないこと、K-NET 矢部の観測地震動を入力していること、線形な解析手法を用いていることが挙げられるのではないかと考えた。

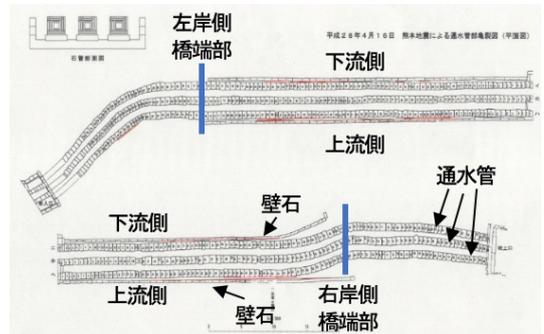
本研究では、通潤橋と側方地盤を一体化した解析モデルと、通潤橋に適した入力地震動と、要素間の破壊や滑りを再現できる改良版個別要素法⁸⁾を用いることによって、熊本地震による通潤橋の被災メカニズムを解明することを目的としている。具体的には、微動計測によ



(a) 壁石のはらみ出しと盛土の亀裂²⁾



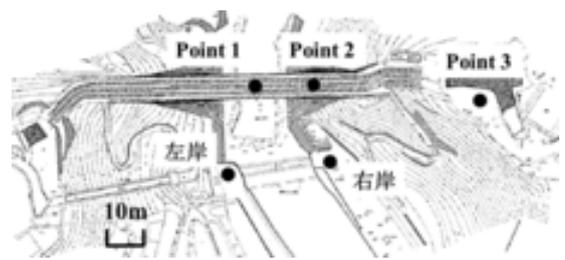
(b) 壁石のはらみ出し量のコンター図 (赤色ほど大きい)³⁾



(c) 盛土の亀裂位置

図2 通潤橋の被災状況

り、通潤橋と側方地盤の振動特性を明らかにし、振動特性を説明できる通潤橋と側方地盤とを一体化した解析モデルを構築した。また、通潤橋と K-NET 矢部における地盤の H/V スペクトル比を比較したところ、異なる特徴を示すことが明らかとなったので、2通りの方法より地震動を推定した。文献⁹⁾より、通潤橋の基礎部分は岩着であることが読み取れるため、等価線形解析により引き戻した K-NET 矢部の基盤面地震動を1つ目の推定地震動(推定地震動¹⁾)とした。2つ目の方法として、通潤橋と K-NET 矢部における H/V スペクトル比を用いて K-NET 矢部の観測地震動を補正する経験的手法¹⁰⁾を用いた(推定地震動²⁾)。そして、改良版個別要素法を用いた数値解析により、K-NET 矢部での観測地震動と2通りの推定地震動それぞれを入力した地震応答解析を実施した。その結果、K-NET 矢部の観測地震動と推定地震動1を入力したときはアーチ中央部の壁石が落下するなど実被害と異なる挙動を示した。これに対し、推定地震動2を入力したときは、壁石は落下せず、かつ壁石のはらみ出しが端部寄りで発生するなど、実被害に近くなり、最も実被害を良好に再現することができた。経験的手法を用いた推定地震動を入力したときに実被害を良好に再現することができた理由を周波数特性の観点から考察するとともに、どの程度まで入力地震動が大きいと壁石の落下やアーチ構造の崩壊が発生するかについて検討を行った。



(a) 通潤橋および周辺地盤上の計測点¹⁾



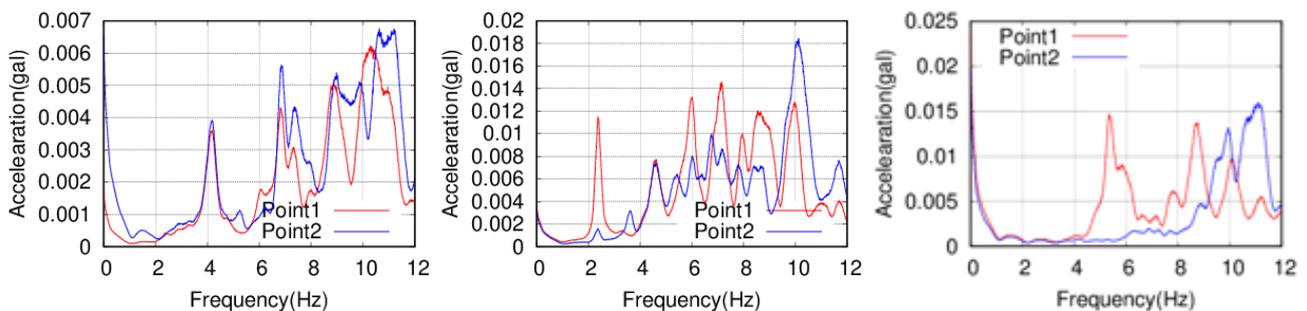
(b) 通潤橋と K-NET 矢部の位置関係¹¹⁾

図3 微動計測地点

2. 通潤橋と K-NET 矢部における微動計測

(1) 微動計測の概要

2016年10月4日と2017年11月1日に、通潤橋と周辺地盤の振動特性を明らかにするため、現地で微動計測を行った。通潤橋のアーチ中央 (Point 1)、アーチ中央と右岸側端部の中間点 (Point 2)、通潤橋の右岸側の側方地盤上の点 (Point 3)、通潤橋底部の右岸側の地盤 (Point 4)、左岸側の地盤 (Point



(a) 橋軸方向

(b) 橋軸直角方向

(c) 鉛直方向

図4 通潤橋の微動のフーリエスペクトル

5), そして通潤橋から約 0.9km 離れた強震観測点 (K-NET 矢部) の計 6 点にて計測を行った. 図 3 に計測地点を示す.

微動計測には白山工業株式会社の JU-410 を 2 台または 3 台用いて加速度を 12 分間計測した. サンプル周波数は 100Hz である.

(2) 通潤橋の固有振動数および減衰定数

図 4 に, 通潤橋上の Point 1 と Point2 の 2 点で同時計測した微動の橋軸直角方向, 橋軸方向, 鉛直方向のフーリエスペクトルを示す. フーリエスペクトルを計算する際は 0.4Hz の Parzen Window を用いて平滑化を行った.

図より, 1 次固有振動数は橋軸方向が 4.18Hz, 橋軸直角方向が 2.37Hz, 鉛直方向が 5.35Hz であると読み取れる. また, 入力をホワイトと仮定してハーフパワー法を用いて 1 次の減衰定数を求めたところ, 減衰定数は橋軸方向が 0.029, 橋軸直角方向が 0.038, 鉛直方向が 0.030 となった. これらの結果は既往の研究^{5),7)}とも整合している.

フーリエ振幅の最大値は, 橋軸方向が約 11Hz, 橋軸直角方向が 10Hz であるが, これは後述するように底部地盤の卓越振動数の影響を受けていると考えられる.

(3) 通潤橋の側方地盤の固有振動数

図 5 に, 右岸側の底部地盤 (Point 4) に対する右岸側の側方地盤 (Point 3) の伝達関数を示す. 水平方向 (NS, EW 方向) の伝達関数から, 側方地盤の水平方向の固有振動数は EW 方向が 6.3Hz, NS 方向が 6Hz であり, 水平方向の固有振動数は約 6Hz 程度であること読み取れる. 橋梁よりも側方地盤の方が 1 次固有振動数が高いことから, 側方地盤の方が相対的に硬いことがわかる.

(4) 通潤橋の底部地盤と K-NET 矢部の H/V スペクトル比

図 6 に, 通潤橋の右岸側の底部地盤 (Point 4), 左岸側の底部地盤 (Point 5), K-NET 矢部の 3 地点で測定した H/V スペクトル比を示す.

H は水平 2 成分 (NS, EW 方向) のフーリエ振幅の二乗和平方根, V は鉛直成分 (UD 方向) のフーリエ振幅である.

H/V スペクトル比の卓越振動数を読み取ると, 通潤橋の底部地盤では右岸側と左岸側で多少の差はあるものの, とともに 10 ~ 11Hz 前後で卓越しているのに対して, K-NET 矢部の地盤では 7.2Hz で卓越していることが分かる.

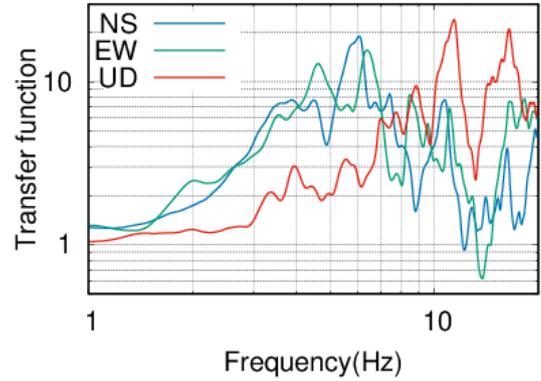


図 5 通潤橋の右岸側の側方地盤の伝達関数

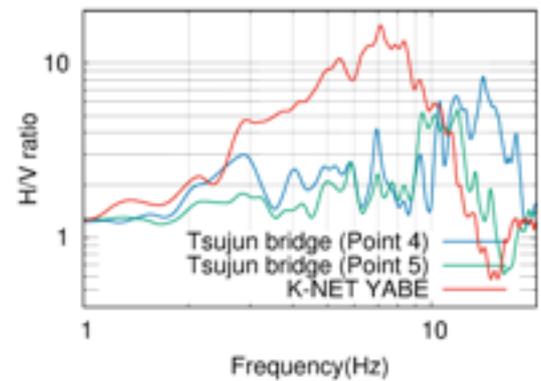


図 6 通潤橋の底部地盤および K-NET 矢部の H/V スペクトル比

表 1: 通潤橋および K-NET 矢部の固有振動数のまとめ

地点 方向	橋軸	通潤橋 橋軸直角	鉛直	通潤橋 側方地盤	通潤橋 底部地盤	K-NET 矢部
固有振動数	4.18Hz	2.37Hz	5.35Hz	6Hz	10-11Hz	7.2Hz
減衰定数	0.029	0.038	0.031	-	-	-

H/V スペクトル比の振幅を比較すると、通潤橋の底部地盤では K-NET 矢部に比べて 3～9Hz において大きく下回り、10～11Hz において大きく上回る。これらのことから、両地点は直線距離こそ約 0.9km と近いものの、地盤の振動特性が異なっており、K-NET 矢部で観測された地震動と実際に通潤橋に作用した地震動は異なっている可能性が示唆された。

以上の微動計測によって得られた固有振動数および H/V スペクトル比の卓越振動数を表-1 にまとめる。

3. 通潤橋の数値解析に用いる入力地震動の推定

(1) 概要

微動計測結果より、通潤橋の底部地盤と強震観測点 K-NET 矢部での H/V スペクトル比の特性が異なることが明らかとなり、通潤橋での地震動は、K-NET 矢部での観測地震動と異なっている可能性が示唆された。そこで本研究では、2通りの方法により地震動を推定した。1つ目の方法は、K-NET 矢部の基盤面地震動を通潤橋の入力地震動と見なす方法である。2つ目の方法は、常時微動の H/V スペクトル比を用いて観測地震動を補正する中村らの方法¹⁰⁾である。

(2) K-NET 矢部の基盤面地震動を入力する方法 (推定地震動¹⁾)

過去の資料から、通潤橋の基礎部分は岩着であることが読み取れる⁹⁾ため、K-NET 矢部の地表面観測地震動を重複反射理論により工学的基盤面まで引き戻して得られた基盤面地震動を1つ目の推定地震動とした。

K-NET 矢部の土質データ⁶⁾を表2に示す。地盤モデルの1次固有振動数は7.2Hzとなり、表1に示した H/V スペクトル比の卓越振動数とも一致した。地震動の引き戻しの計算は線形解析とし、減衰定数は5%と仮定した。

本手法によって推定された地震動を、「推定地震動1」と呼ぶこととする。

表 2: K-NET 矢部の土質データ⁶⁾

深さ km	密度 ton/m ³	せん断速度 m/s
0-3	1.63	90
4-5	2.00	230
5	2.16	810

(3) 中村らの推定法¹⁰⁾ (推定地震動2)

中村らの方法では、次式のような補正係数 β_O 、 β_E を定義している。

$$\beta_O = \frac{1/C_{Omax}(H/V)_O^M}{(H/V)_O^E} \quad (1a)$$

$$\beta_E = \frac{1/C_{Emax}(H/V)_E^M}{(H/V)_E^E} \quad (1b)$$

ここに、下添字の O と E は強震観測点と推定点を意味する。上添字の M と E は常時微動と地震動を意味する。 C_{Omax} 、 C_{Emax} は強震観測点と推定点における常時微動 H/V スペクトル比の振幅の最大値である。すなわち、常時微動 H/V スペクトル比の振幅の最大値が1となるように基準化したものを、地震動 H/V スペクトル比で除したものが補正係数 β_O 、 β_E である。

補正係数 β_O 、 β_E を導入すると、強震観測点と推定点の常時微動 H/V スペクトル比の比は(2)式のようになる。

$$\frac{(H/V)_E^M}{(H/V)_O^M} = \frac{C_{Emax} \beta (H/V)_E^E}{C_{Omax} \beta (H/V)_O^E} \quad (2)$$

$$H_E^E = \alpha \frac{(H/V)_E^M}{(H/V)_O^M} H_O^E \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{\beta_o}{\beta_E} \cdot \gamma_{E/O} \cdot \frac{1/C_{Emax}}{1/C_{Omax}} \cdot \gamma_{E/O} = \frac{V_E^E}{V_O^E} \quad (4)$$

まず、補正係数 β_E の推定方法について説明する。中村らは、複数の強震観測点の強震記録から、周期0.1秒から2秒の間での β_O の平均値と β_E の平均値が比較的近い2地点では正の相関があることに着目し、強震記録が得られている地点の H/V_O^E と H/V_O^M の比をとり、その周期0.1秒から2秒の間の平均値を地震動推定点の補正係数 β_E とすることを提案している。

次に、鉛直地震動スペクトル $\gamma_{E/O}$ の推定方法について説明する。中村らは、鉛直地震動スペクトル $\gamma_{E/O}$ のピーク周期が、強震観測点と推定点のうち地盤が軟らかい方 (H/V スペクトル比の卓越振動数が低い方) の常時微動 H/V スペクトル比のピーク周期とよく似ていることに着目し、以下の推定式を提案している。

$$\gamma_{E/O}^I = \frac{1 - C_{max}}{2} \frac{e^{T/T_g-1} - e^{-(T/T_g-1)}}{e^{T/T_g-1} + e^{-(T/T_g-1)}} + \frac{1 + C'_{max}}{2} \quad (5a) \quad \gamma_{E/D}^{II} = 1 / \gamma_{E/O}^I \quad (5b)$$

ここに、 $\gamma_{E/O}^I$ は強震観測点の方が地盤が硬い場合の推定式、 $\gamma_{E/O}^{II}$ は強震観測点の方が地盤が軟らかい場合の推定式であり、周期 T 毎に推定できるようになっている。 T_g は強震観測点と推定点の常時微動 H/V スペクトル比のピーク周期のうち大きい方の値である。 C'_{max} の推定式は以下の通りである。

$$C'_{max} = V_{E/O}(90\%) = 1.2 \times C_{max} + 1.6 \quad (6a)$$

$$C_{max} = \text{MAX}(C_{Omax}/C_{Emax}, C_{Emax}/C_{Omax}) \quad (6b)$$

地震動の位相特性については考慮されていないため、観測地震動の位相を用いて計算している。本手法によって推定された地震動を、「推定地震動2」と呼ぶこととする。

(4) 観測地震動と推定地震動の比較

K-NET 矢部で観測された観測地震動と2通りの方法によって得られた推定地震動の加速度時刻歴、加速度フーリエスペクトルを図7.8に示す。NS方向とEW方向の水平成分を、橋軸方向(x方向)と橋軸直角方向(y方向)に座標変換しているが、通潤橋の橋軸方向の南北方向に対する傾きは約16°程度であるため、x成分はおよそNS成分となり、y成分はおよそEW成分となる。推定地震動は水平成分のみであるため、上下方向(z方向)は観測地震動の加速度時刻歴のみ示している。

加速度時刻歴は、後の数値解析に用いる入力地震動を示している。前震と本震をつなげて1つの加速度時刻歴としている。改良版個別要素法を用いた解析では計算時間が非常に長くなるため、加速度の大きい部分を抽出している。解

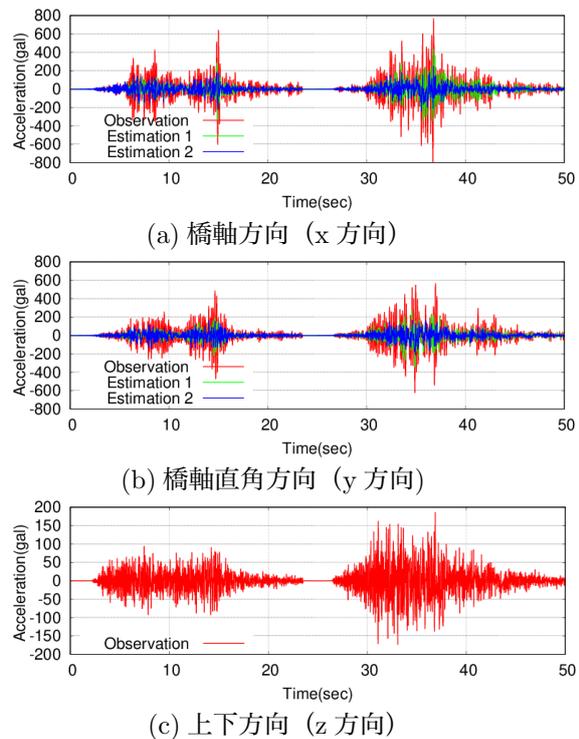


図7 加速度時刻歴

析開始時に重力が入力されることによる振動を減衰させるため、最初の1秒間0galを入力している。続いて前震を22.5秒間入力し、前震による振動を減衰させるため再び1.5秒間0galを入力して、本震を25秒間入力し、合計50秒間の解析を行っている。

図7より、最大加速度は「観測地震動」>「推定地震動1」>「推定地震動2」の順に小さくなることわかる。図8より、「推定地震動1」は「観測地震動」に比べて、K-NET矢部の地盤の固有振動数である7Hz前後のフーリエ振幅が小さくなっている。「推定地震動2」は「観測地震動」に比べて、H/Vスペクトル比の振幅の違いを反映して、3～9Hzにおいてフーリエ振幅が小さく、10～11Hzにおいてフーリエ振幅が大きくなっている。

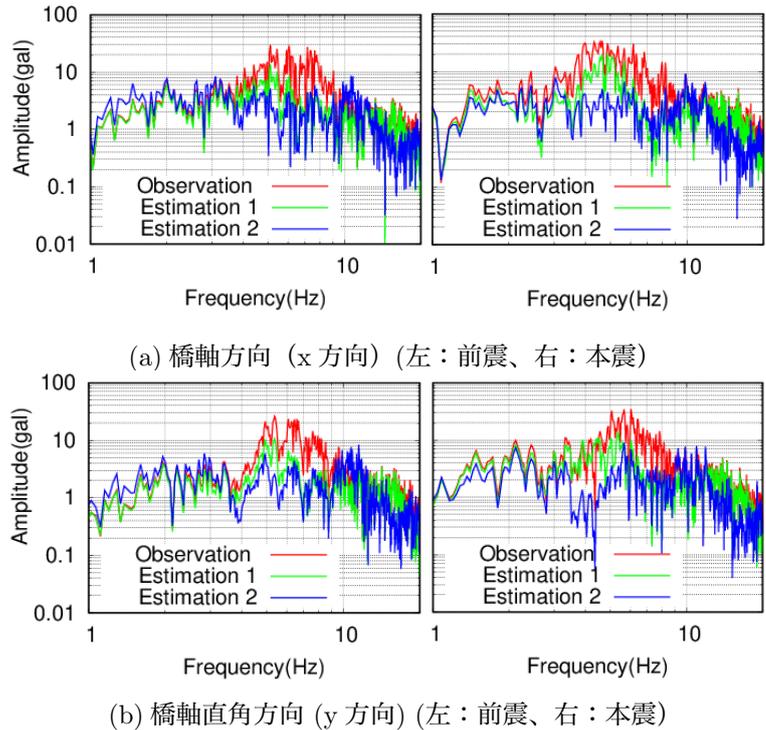


図8 加速度フーリエスペクトルの比較

4. 通潤橋の解析モデルおよび解析諸元の決定

(1) 改良版個別要素法⁸⁾

改良版個別要素法は、構造物を剛体ブロック要素の集合体としてモデル化する離散体の数値解析手法である。

従来の剛体ブロックを用いた個別要素法¹²⁾では、ばね定数を理論的に決定することができないという問題点があった。この問題点を解決したのが改良版個別要素法であり、要素表面をセグメントに離散化して(図9(a))、セグメントの代表点にばね・ダッシュポットを設置(図9(b))した。セグメント毎の力のつり合い式から、ばね定数を物性値から理論的に決定できるようになった。

弾性挙動は要素間に設置する復元ばね(図9(c))によって表現する。もともと一体となっ

て連続している要素間に設置するばねを復元ばねと定義し、復元ばねによって連結することで一体となって挙動するようにしている。破壊現象は復元ばねの切断によってモデル化している。もともと連続していない要素同士が接触する場合や、復元ばねで連結されていた要素間が、破壊後に再接触する場合に要素間に設置するばね・ダッシュポットを接触ばね・接触ダッシュポットと定義する(図9(d))。復元ばねと接触ばねのばね定数の算定式は同じであるが、上記のように区別している。接触ダッシュポットは衝

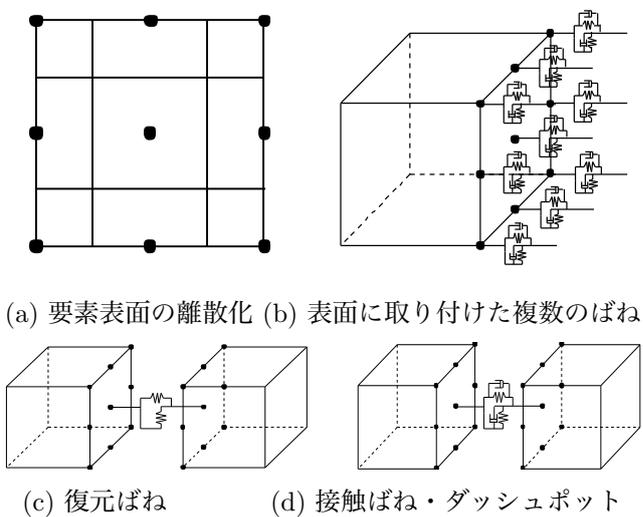


図9 改良版個別要素法の概要

突によるエネルギーを消散させるためのものであり、接触ばねと並列に設置する。以上、改良版個別要素法の概要を述べたが、詳細については文献⁸⁾を参照して頂きたい。

(2) 解析モデル

通潤橋本体は文献¹⁾を参考に、図10(a)に示す赤枠で囲った領域をモデル化し、橋長72.9m、幅員6.6m、高さ21.6mとした。解析モデルの全体図および橋本体の上面図を図10(b)(c)に示す。x軸を橋軸方向、y軸を橋軸直角方向とする。石材の大きさは部位によって多少異なるものの、解析時間の制約から、およそ1m×1m×1mとした。なお、実際に通潤橋で用いられている石材の大きさは、こちらも部位によって多少異なるもののおよそ0.6m×0.6m×0.6mである。通水管を構成する石管は図10(c)に黄色で示すように断面が1辺0.8mの正方形とし、長さは約0.6mとした。1列あたりの石管の数は125である。実際の石管には農業用水を通すため0.3m×0.3mの空洞があるが、簡単のため密度を小さくすることによって再現している。3列の通水管同士の間と、通水管と壁石の間には、図10(d)に赤色で示す盛土要素を配置した。盛土要素は橋軸直角方向に2分割し、橋軸方向に亀裂が入る様子を再現できるようにした。通潤橋を上流側と下流側から挟む斜面状の地盤については、石材と同程度の要素サイズでモデル化している。

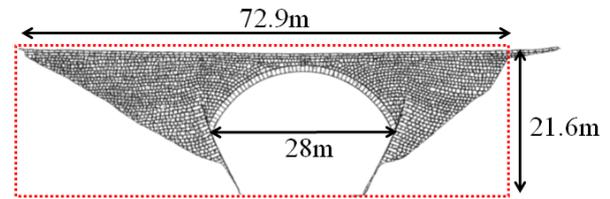
通潤橋の側方地盤は、橋梁の振動の影響を受けない十分に大きな値として、左右両岸ともに40m×70m×21.6mとした。要素サイズは計算時間の制約から、およそ8m×7.8m×5.4mとした。側方の境界は自由とした。

過去の資料から、通潤橋の基礎部分は岩着であることが読み取れる⁹⁾ため、図10(b)に濃い灰色で示す地表面以下の地盤は基盤とし、固定要素とした。

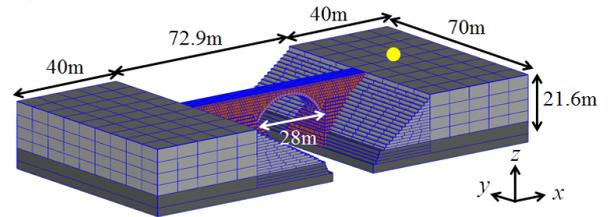
(3) 物性値

物性値の決定にあたり、石（アーチ部分を除く）、石（アーチ部分）、通水管を構成する石管、壁石と通水管の間の盛土、地盤（盛土を除く）の5つの要素を設定した。表3に物性値を示す。

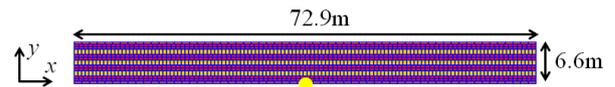
地盤の物性値は、側方地盤のみの1次固有振動数が微動計測によって得られた1次固有振動数（6Hz）に合うようにせん断弾性係数を求め、ポアソン



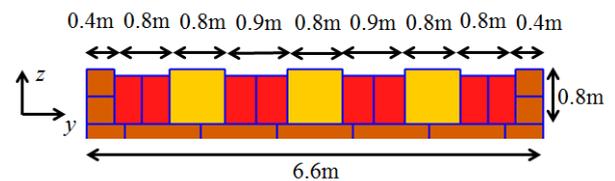
(a) 橋本体の立面図およびモデル化領域 (文献¹⁾に加筆)



(b) 全体図 (黄色の●は応答出力点)



(c) 通潤橋上面図 (黄色の●は応答出力点)



(d) 通水管周辺の断面図

図10 解析モデルの概要

表 3: 解析モデルの物性値

	密度 [kg/m ³]	ヤング率 [N/m ²]	ポアソン 比
石 (アーチ部を除く)	2.7 × 10 ³	7.2 × 10 ⁸	0.25
石 (アーチ部)	2.7 × 10 ³	6.0 × 10 ⁹	0.25
石管	2.3 × 10 ³	2.0 × 10 ⁸	0.25
盛土	1.8 × 10 ³	7.5 × 10 ⁷	0.30
地盤 (盛土を除く)	1.8 × 10 ³	1.44 × 10 ⁹	0.30
基盤	2.1 × 10 ³	3.68 × 10 ⁹	0.30

比との関係からヤング率を求めた。通潤橋を上流側と下流側から挟む斜面状の地盤についても、側方地盤と同じ物性値を用いた。

先に地盤の物性値を決定し、石材、石管および盛土の物性値については、既往の研究^{6),13)}などを参考に初期値を決めた上で、固有振動数を再現できる値を探索した。

(4) 解析モデルおよび物性値の弾性解析に対する妥当性

作成した解析モデルおよび物性値の弾性解析に対する妥当性を検証するため、通潤橋の橋軸方向、橋軸直角方向、鉛直方向の1次固有振動数と、側方地盤の水平方向の固有振動数を求めた。3方向にそれぞれ0.01秒間だけ100galを地動加速度として与えて自由振動させ、50秒間の応答のフーリエ変換によって算定した。この時、モデルが破壊しないよう十分大きな要素間の強度を用いた。橋梁の固有振動数は図10(c)、側方地盤の固有振動数は図10(d)に黄色の●で示した点の応答から求めた。微動計測と数値解析によって得られた卓越振動数の比較を表4に示す。

表 4: 微動計測と解析モデルの卓越振動数の比較

微動計測	微動計測結果 [Hz]	解析結果 [Hz]	差 [Hz]
橋軸方向	4.18	4.66	0.48
橋軸直角方向	2.37	2.32	-0.05
鉛直方向	5.35	5.26	0.09
側方地盤 (水平方向)	6	6.16(x方向) 5.94(y方向)	0.16 -0.06

通潤橋の卓越振動数については、いずれの方向も良好な精度で再現することができた。右岸側の側方地盤の水平方向の卓越振動数は、6Hzになるように設定したが、x方向が6.16Hz、y方向が5.94Hzとなった。x方向の方が高い理由は、通潤橋を上流側と下流側から挟む斜面があるからではないかと考えている。2方向で多少異なるものの、作成した解析モデルの側方地盤の水平方向の卓越振動数は約6Hzとなり、微動計測結果を再現できていると考えられる。

以上の解析結果から、作成した解析モデルおよび物性値が弾性解析に対して妥当であると考えた。

(5) 破壊挙動解析のための要素間強度の設定

要素間の破壊、滑り等を考慮するために、要素間強度を設定する。解析に用いる要素間強度を表5に示す。

表 5: 解析モデルの要素間強度

	引張強度 [N/m ²]	粘着力 [N/m ²]	摩擦係数
石管-石管	1.0 × 10 ⁵	1.0 × 10 ⁵	0.584
石-石・石管	1.0 × 10 ²	1.0 × 10 ²	0.669
石-盛土・地盤	1.0 × 10 ²	1.0 × 10 ²	0.584
盛土-盛土・地盤	1.0 × 10 ²	2.5 × 10 ⁴	0.372
地盤-地盤	破壊しない		

通水管の石管同士をつなぐ漆喰の強度については、通潤橋の漆喰は1つ1つが人の手によって作られており資料が存在しない。しかし図1(b)からも分かるように漆喰部分の断面積は通水管の断面積に対して小さく、地震時の慣性力のような大きな力に対してはそれほど大きな強度を持たなかったものと推察される。本研究では、組積造設計基準¹⁴⁾に示された組積体の許容応力度に、通水管と漆喰の断面積の比率を掛けた見かけの値を通水管同士の強度とした。摩擦係数は、既往の研究¹³⁾を参考に決定した。

石管同士以外の石同士間は、ただ積まれているだけで目地材は用いられていない。また、石と土の間にも目地材はない。したがって引張強度および粘着力は本来0である。しかし、0を入力すると、自重に対して安定するまでの過程において計算が不安定になってしまうことがあるため、計算の安定が得られる十分に小さな値として、引張強度、粘着力ともに1.00 × 10² [N/m²]を与えた。摩擦係数は、既往の研究¹³⁾を参考に決定した。

盛土間および盛土と地盤間の引張強度についても同様に、計算の安定が得られる小さな値を与えた。粘着力と摩擦係数については、N値が1～2程度と仮定して値を設定した。

以上のように、石橋本体を構成する要素については、要素間の破壊を考慮した非線形モデル化を行った。一方の地盤については、実際の地震時にも崩落などの被害は起こらなかったことから、地盤の強度については破壊の起こらないよう十分大きな値とした。要素間の破壊は考慮しない代わりに、次項に述べる方法で非線形性を考慮することとした。

表 6: 地盤の等価ヤング率と等価減衰定数

入力地震動	密度 [N/m ³]	等価ヤング率 [N/m ²]	等価減衰係数	ポアソン比
観測地震動	1.8 × 10 ³	1.24 × 10 ⁹	0.053	0.30
基盤面地震動	1.8 × 10 ³	1.25 × 10 ⁹	0.043	0.30
中村らの方法	1.8 × 10 ³	1.33 × 10 ⁹	0.039	0.30

(6) 地盤の非線形性について

等価線形化手法 DYNEQ¹⁵⁾ を用いて、側方地盤の非線形性について考察した。微動計測結果に合うように決定した表3に示す地盤と基盤の物性値を与えて、3通りの地震動を入力したときの各層の等価せん断弾性係数、等価減衰定数を求めた。基盤は線形とし、地盤の動的変形特性には土木研究所の式を用いた¹⁶⁾。表5に換算した等価ヤング率と等価減衰定数を示す。地震動毎に、等価ヤング率と等価減衰定数は異なり、最大加速度の大きい順に、等価ヤング率は小さくなり、減衰定数は大きくなるが見取れる。地震応答解析では、地震動毎に異なる等価ヤング率と等価減衰定数を用いて地盤をモデル化した。

表 7: 解析ケース

	入力地震動	最大加速度 (y 方向)
ケース 1	観測地震動 (K-NET 矢部の地表面地震動)	626gal
ケース 2	推定地震動 1 (K-NET 矢部の基盤面地震動)	346gal
ケース 3	推定地震動 2(中村の方法)	207gal
ケース 4	観測地震動を振幅調整したもの (K-NET 矢部の地表面地震動)	207gal
ケース 5	推定地震動 1 を振幅調整したもの (K-NET 矢部の基盤面地震動)	207gal

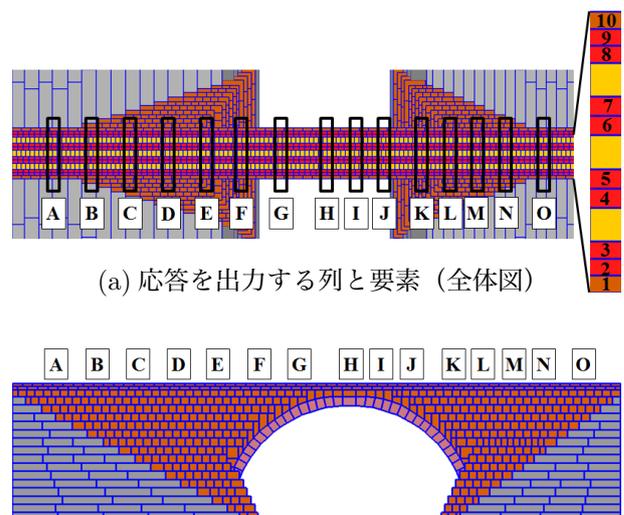
5. 地震応答解析

(1) 解析ケース

解析ケースを表7に示す。ケース1～3では、3通りの地震動に対する地震時挙動を比較する。ケース4、5は、ケース1、2の最大加速度をケース3に一致するように振幅調整したものであり、ケース3～5では地震動の周波数特性の違いが地震時挙動に及ぼす影響について検討する。計算時間間隔は 2.0 × 10⁻⁴ 秒とした。

(2) 着目する応答

図11に応答の出力点を示す。橋上にある合計150要素の重心の変位応答を出力した。橋軸方向には



(a) 応答を出力する列と要素 (全体図)

(b) 応答を出力する列
図 11 応答の出力点

A～O 列の 15 列，橋軸直角方向には 1～10 の 10 要素を対象とし，15 列×10 個の合計 150 要素を対象とした。出力要素の記号は，アルファベットと数字を組み合わせて，例えばアーチ中央の上流側の手摺石であれば「H1」のように表記することとする。

本研究では，通潤橋の主要な被害である「壁石のはらみ出し」と，「盛土の亀裂」に着目した。

本研究では，壁石の一番上の石を手摺石と呼ぶ。「壁石のはらみ出し」について検討するために，上流側の手摺石 1 と下流側の手摺石 10 の橋軸直角方向 (y 方向) 変位を出力した。

2～9 は盛土を構成する要素である。「盛土の亀裂」について検討するため

に，隣り合う盛土要素 (2 と 3, 4 と 5, 8 と 9) の橋軸直角方向 (y 方向) 相対変位から，盛土の亀裂による開口量を出力した。

橋軸直角方向には 1～10 の 10 要素を対象とし，15 列×10 個の合計 150 要素を対象とした。出力要素の記号は，アルファベットと数字を組み合わせて，例えばアーチ中央の上流側の手摺石であれば「H1」のように表記することとする。

本研究では，通潤橋の主要な被害である「壁石のはらみ出し」と，「盛土の亀裂」に着目した。本研究では，壁石の一番上の石を手摺石と呼ぶ。「壁石のはらみ出し」について検討するために，上流側の手摺石 1 と下流側の手摺石 10 の橋軸直角方向 (y 方向) 変位を出力した。

2～9 は盛土を構成する要素である。「盛土の亀裂」について検討するために，隣り合う盛土要素 (2 と 3, 4 と 5, 8 と 9) の橋軸直角方向 (y 方向) 相対変位から，盛土の亀裂による開口量を出力した。

a) ケース 1

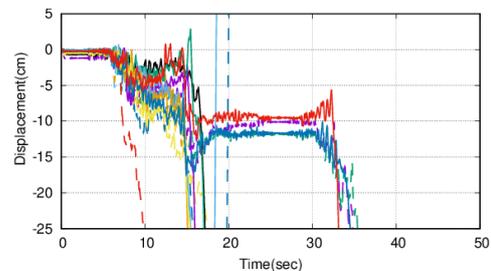
ケース 1 の手摺石の橋軸直角方向 (y 方向) 変位を図 12 に示す。上流側ではマイナスの値が，下流側ではプラスの値がはらみ出しの方向になる。前震 (0～25 秒) で手摺石全体がはらみ出し，通潤橋中央部 (左右 2 列ずつを除く C1～M1) の手摺石が多数落下した後，本震 (25～50 秒) で残りの手摺石 (A1, B1,

表 8: 地盤の等価ヤング率と等価減衰定数

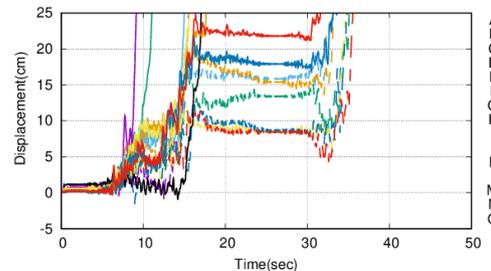
入力地震動	密度 [N/m ³]	等価ヤング率 [N/m ²]	等価減衰係数	ポアソン比
観測地震動	1.8 × 10 ³	1.24 × 10 ⁹	0.053	0.30
基盤面地震動	1.8 × 10 ³	1.25 × 10 ⁹	0.043	0.30
中村らの方法	1.8 × 10 ³	1.33 × 10 ⁹	0.039	0.30

表 9: 解析ケース

	入力地震動	最大加速度 (y 方向)
ケース 1	観測地震動 (K-NET 矢部の地表面地震動)	626gal
ケース 2	推定地震動 1 (K-NET 矢部の基盤面地震動)	346gal
ケース 3	推定地震動 2(中村の方法)	207gal
ケース 4	観測地震動を振幅調整したもの (K-NET 矢部の地表面地震動)	207gal
ケース 5	推定地震動 1 を振幅調整したもの (K-NET 矢部の基盤面地震動)	207gal



(a) 上流側



(b) 下流側

図 12 手摺石の橋軸直角方向変位 (ケース 1)

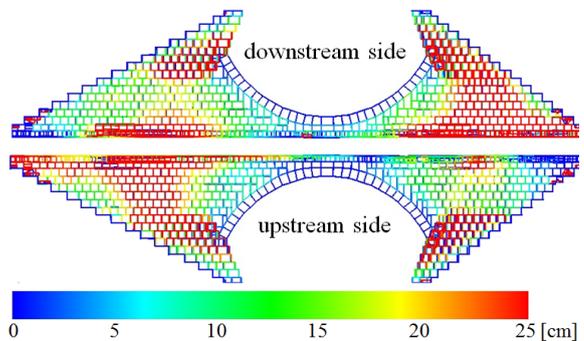


図 13 壁石の橋軸直交方向はらみ出し量 (ケース 1)

N1, O1) が落下し、最終的に応答を出力したすべての手摺石が落下した。下流側も、最終的に応答を出力した全ての手摺石が落下した。実際の手摺石は1個も落下していないので、ケース1は被害を過大評価している。

本震後(50秒)の橋軸直角方向のはらみ出し量のコンターを図13に示す。落下した手摺石は表示されていないので、一番上の要素は手摺石の奥にある盛土の橋軸直角方向変位を示している。20cmを超えて大きくはらみ出している壁石が多く存在しており、ケース1ははらみ出し量を過大評価していることがわかる。

上流側の盛土を構成する要素間(2と3の間, 4と5の間)の橋軸直角方向相対変位を図14に示す。ほぼ全ての箇所で相対変位が1cmを超えており、前震より本震で大きな相対変位が生じている。なお、下流側の要素間(6と7の間, 8と9の間)でも同様の傾向が得られたため、図は割愛する。

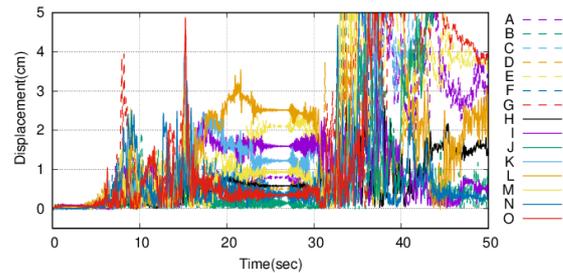
以上述べたケース1のこれらの結果は、図2に示した実際の被害と比べて、かなり被害を過剰に評価してしまっている。したがって解析の結果からも、実際に通潤橋に作用した地震動はK-NET矢部で観測された地震動と異なっていることが示唆される。

b) ケース2

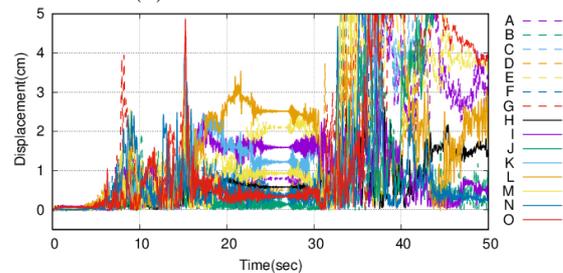
ケース2の手摺石の橋軸直角方向(y方向)変位を図15に示す。推定地震動1を用いた解析では、半分以上の手摺石が落下しなかった。落下するのは上流側ではF~M列, 下流側ではG列とI~K列の手摺石であった。本震後(50秒)の橋軸直角方向のはらみ出し量のコンターを図16に示す。落下した手摺石は表示されていないので、手摺石が落下したところは奥にある盛土の変位を示している。概ね3cm程度の壁石のはらみ出しが全体に広がっており、局所的に9cm以上のはらみ出しが発生している。手摺石が落下したと合わせ、ケース2でも実被害を過大評価していることがわかる。

上流側の盛土を構成する要素間(2と3の間, 4と5の間)の橋軸直角方向相対変位を図17に示す。ケース1よりも相対変位は減少したが、全ての列で相対変位が生じている。

以上の結果から、推定地震動1でも通潤橋の被害を過大評価する結果となった。

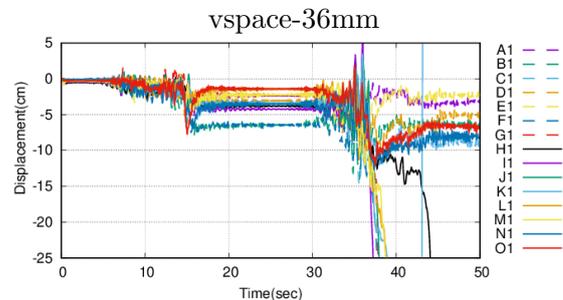


(a) 上流側の盛土2と3の間

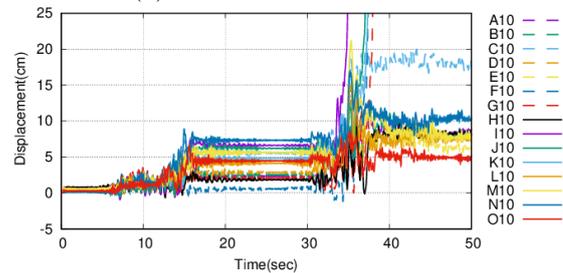


(b) 上流側の盛土4と5の間

図14 盛土の橋軸直角方向相対変位(ケース1)



(a) 上流側の盛土2と3の間



(b) 上流側の盛土4と5の間

図15 手摺石の橋軸直交方向変位(ケース2)

c) ケース 3

ケース 3 の手摺石の橋軸直角方向 (y 方向) 変位を図 18 に示す。前震ではらみ出した手摺石が本震ですらにはらみ出していることがわかる。最大で 12cm ほど変位したものもあるが、最終的に全ての手摺石は落下せず、実被害と一致した。

本震後 (50 秒) の橋軸直角方向のはらみ出し量のコンターを図 19 に示す。輪石の端部付近で大きな変位が発生している。これは、モデル化において、輪石端部と壁石が隣接するところに空隙があり (図 11(b)), 石が動きやすくなっているためであると考えられる。

橋上部に着目すると、アーチ中央部ではなく、アーチの端部から橋の端部の間で大きなはらみ出しが生じている。これは図 2(b) に示した実際のはらみ出し位置ともよく一致している。解析での最大はらみ出し量は上流側で約 8cm, 下流側で約 10cm であった。これは地震後に計測された実際のはらみ出し (15cm 程度) に比べてやや小さいが、実際の通潤橋では、前震と本震以外にも地震後に多くの余震が発生したことや、一度はらみ出すと自重がはらみ出す方向に作用することから、地震後に時間をかけて 15cm 程度まで大きくなったものと考えられる。

上流側の盛土を構成する要素間 (外側の 2 と 3 の間, 内側の 4 と 5 の間) の橋軸直角方向相対変位を図 20 に示す。橋の外側の盛土では A ~ E 列, K ~ O 列において亀裂が発生していることが分かる。これらの位置はおよそ通潤橋のアーチ部以外の位置であり、図 2(c) に示した実際の亀裂発生位置に対応している。亀裂の大きさは、B 列を除けば約 1 ~ 3cm 程度である。一方、橋の内側の盛土では最終的な相対変位はすべて 1cm と以下となり、外側の盛土に比べて相対変位は小さくなった。これらの結果は図 2(c) に示す亀裂の発生箇所によく一致している。

d) まとめ

ケース 1 ~ 3 の比較から、実際の通潤橋の被害を最も良好に再現できるのは、推定地震動 2 を用いたケース 3 だった。また、被害を過大評価したケース 1, 2 を含め、いずれのケースにおいても通潤橋のアーチ構造自体は健全で、石造りのアーチ橋という構造に関しては巨視的な被害は生じない結果となった。

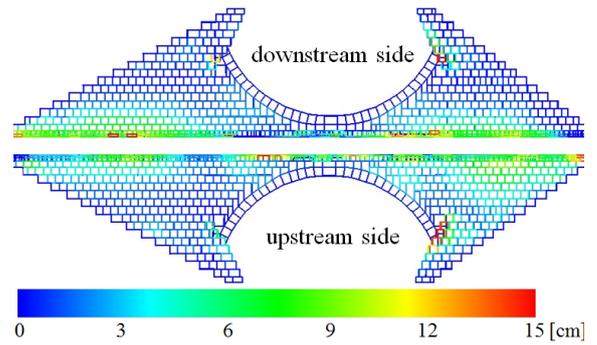
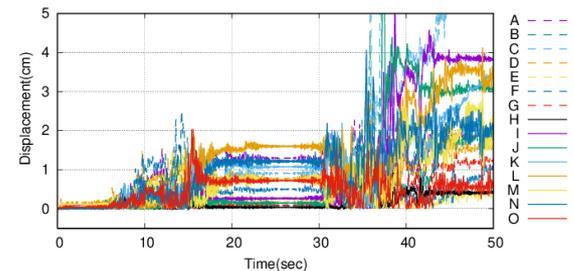
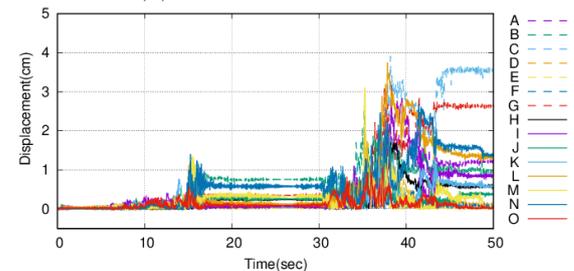


図 16 壁石の橋軸直交方向はらみ出し量 (ケース 2)

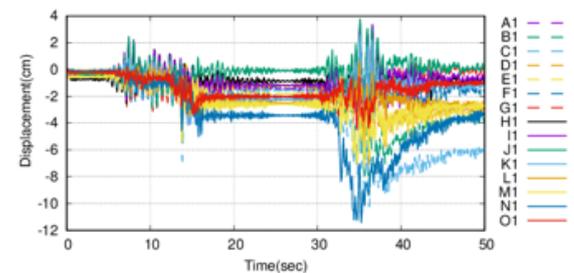


(a) 上流側の盛土 2 と 3 の間

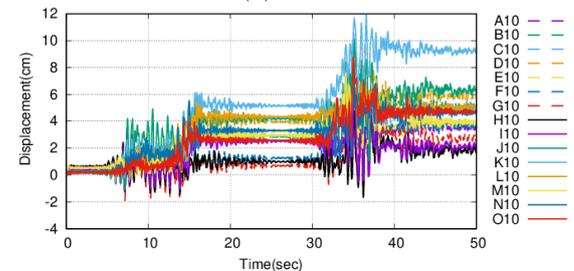


(b) 上流側の盛土 4 と 5 の間

図 17 盛土の橋軸直角方向相対変位 (ケース 2)



(a) 上流側



(b) 下流側

図 18 手摺石の橋軸直角方向変位 (ケース 3)

(4) 地震動の周波数特性の影響分析

a) 概要

ケース1～3の比較から、実際の通潤橋の被害を最も良好に再現できるのは、推定地震動2を用いたケース3であった。しかし、ケース3の推定地震動2は他の地震動に比べて最大加速度が小さく、単純に加速度振幅の大きさが解析結果に影響しただけとも考えられる。そこで地震動の周波数特性の影響について考察するため、ケース1, 2それぞれの水平動を、橋軸直角方向成分が推定地震動2の207.03galに合うように振幅調整したものをケース4, 5とした。橋軸方向と鉛直方向成分は、橋軸直角方向と同じ比率で振幅調整を行った。表7に解析ケースを示す。

b) 解析結果

ケース4, 5の手摺石の橋軸直角方向(y方向)変位を図21, 23に、本震後(50秒)の橋軸直角方向のはらみ出し量のコンターを図22, 24に示す。

ケース4, 5のいずれも、アーチ中央部付近で手摺石が1つ落下した(ケース4は下流側のI列, ケース5は上流側のJ列が落下)。はらみ出し量については、アーチ上ではらみ出し量が最大となり、実際と異なる傾向となった。また、ケース3に比べてはらみ出しの大きさも発生範囲も大きくなった。

c) 考察

観測地震動と推定地震動1(ケース1, 2)の橋軸直角方向の最大加速度をケース3に合うように振幅調整したケース4, 5では、橋のアーチ部で手摺石が落下し、アーチ部のはらみ出し量が最大となり、実被害を再現することができなかった。

この理由を、通潤橋の微動のフーリエスペクトル(図4)と地震動のフーリエスペクトルの比較(図8)と照らし合わせて考察する。ケース3の推定地震動2は他の地震動(観測地震動, 推定地震動1)に比べて、3.5Hz～9Hzの振幅が小さく、10Hzの振幅が大きくなっていることがわかる。これは、H/Vスペクトル比(図6)により振幅に補正を行っているためである。

観測地震動と推定地震動1は、3.5Hz～9Hzの成分を多く含むが、図4(b)より、この振動数帯では通潤橋中央のPoint 1の方がPoint 2よりも卓越していることがわかる。これに対して、推定地震動が卓越する10Hzでは、図4(b)より、Point 2の方が卓越していることがわかる。Point 1はH列, Point 2はおおよそL列の位置に相当する。

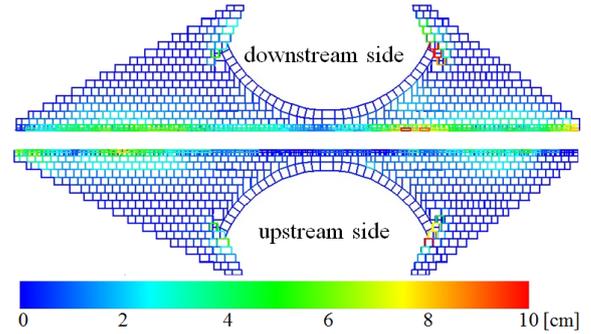
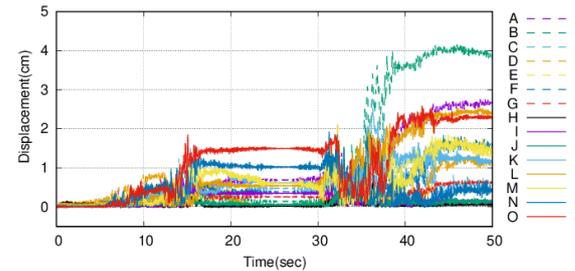
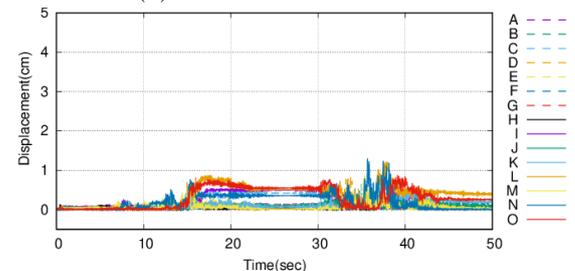


図19 壁石の橋軸直角方向はらみ出し量(ケース3)

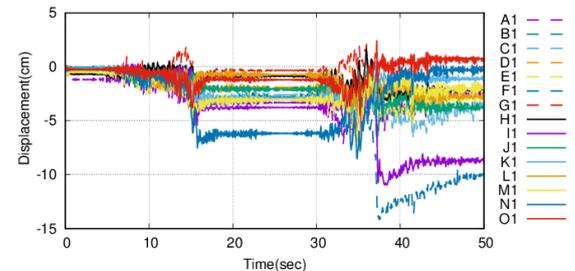


(a) 上流側の盛土2と3の間

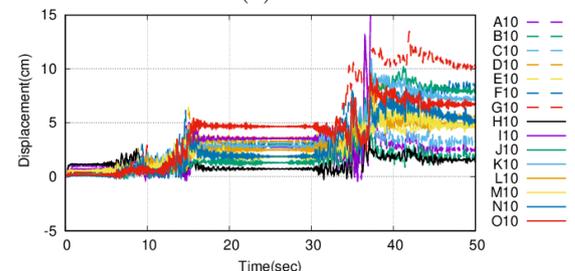


(b) 上流側の盛土4と5の間

図20 盛土の橋軸直角方向相対変位(ケース3)



(a) 下流側



(b) 上流側

図21 手摺石の橋軸直角方向変位(ケース4)

図21 手摺石の橋軸直角方向変位(ケース4)

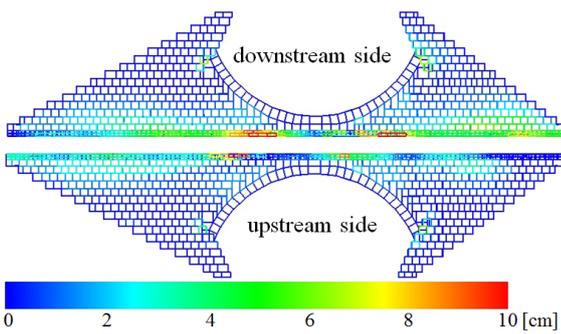


図 22 壁石の橋軸直角方向はらみ出し量 (ケース 4)

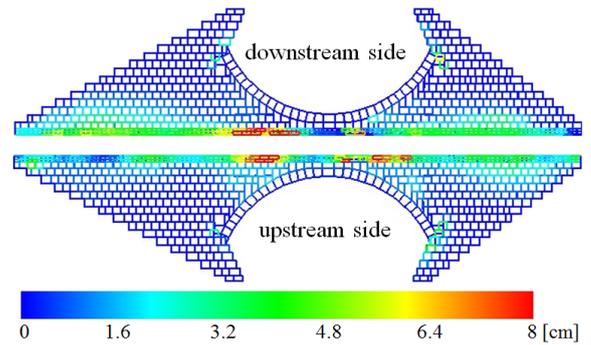
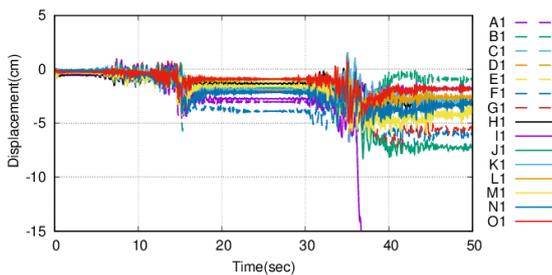
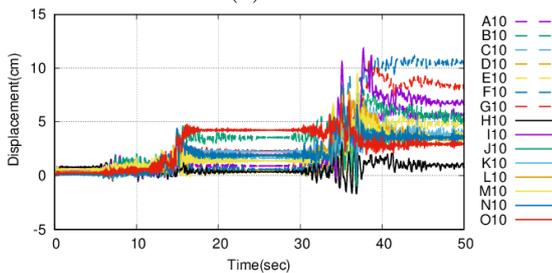


図 24 壁石の橋軸直角方向はらみ出し量 (ケース 5)



(a) 上流側



(b) 下流側

図 23 手摺石の橋軸直角方向変位 (ケース 5)

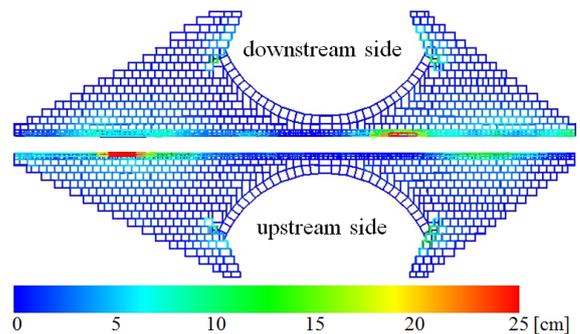
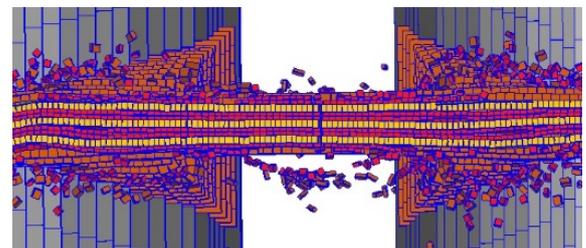
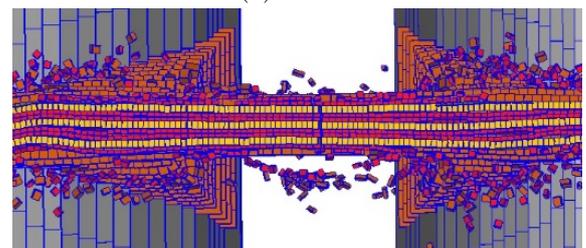


図 25 壁石の橋軸直角方向はらみ出し量 (280gal)



(a) 側面図



(b) 上流側から見た図

図 26 アーチ構造が崩壊する様子 (1100gal)

以上のことから、観測地震動および推定地震動 1 ではアーチ中央で最もはらみ出し量が大きくなるのに対し、推定地震動 2 ではアーチ中央よりも、アーチ端部と橋端部の間ではらみ出し量が大きくなり、実際の被害に良い一致を示したものと考えられる。石橋の被害推定においては、地震動の周波数特性によって弱点となる箇所が異なる結果となることも明らかとなった。

6. 漸増動的解析 (IDA)

(1) 概要

漸増動的解析^{17),18)} (Incremental Dynamic Analysis, 以下 IDA) は、基準となる入力地震動に振幅倍率を乗じることで線形に振幅を調整した地震動を複数作成し、入力地震動の振幅を徐々に増加させながら非線形時刻歴動的解析を繰り返し行った結果に基づき、構造物の耐震性能を評価する手法である。

本節では、IDAを通潤橋に適用することで、通潤橋の耐震性能を簡単に評価する。通潤橋の耐震性能として、手摺石が落下しない、アーチ構造を保持できる、の2段階の基準を設けることとした。基準とする入力地震動はこれまでの結果を踏まえて推定地震動2とした。

手摺石の落下については、推定地震動2の橋軸直角方向の最大加速度(207gal)を振幅調整し、220galから20gal刻みで増加させ、手摺石が落下する最大加速度を求めた。アーチ構造の保持については、100gal単位で増加させた。橋軸直角方向と同じ比率で、橋軸方向と鉛直方向の振幅も振幅調整を行った。

(2) 解析結果

a) 手摺石の落下

漸増動的解析の結果、橋軸直角方向の最大加速度が260gal以下ではいずれの手摺石も落下しなかったが、280galになったところで、図25のように上流側のC1の手摺石が最初に落下した。280galは推定地震動2のおよそ1.35倍である。熊本地震において、手摺石ははらみ出したものの落下はしなかったが、1.35倍程度大きい地震動であれば落下していた可能性があると考えられ、あまり余裕がなかった可能性がある。

b) アーチ構造の保持

通潤橋のアーチ構造は、橋軸直角方向に最大加速度を1000galに調整した地震動を入力しても崩壊には至らず、1100galの地震動を入力したところで、図26のようにアーチ構造を保つことができなくなって崩壊した。推定地震動2の5倍程度の地震動が作用してはじめてアーチ構造自体が崩壊することから、アーチ構造は熊本地震に対しては十分な耐力を有していたと考えられる。

7. まとめ

本研究では、熊本地震によって被災した重要文化財「通潤橋」の被災メカニズムを、改良版個別要素法を用いた数値解析によって分析した。

現地での微動計測により、通潤橋本体と側方地盤の固有振動数を求めた。そして、側方地盤および通潤橋本体の固有振動数を再現できるような解析モデルを構築した。

さらに、通潤橋の底部地盤と、強震記録の得られているK-NET矢部での地盤のH/Vスペクトル比を求めた。2地点のH/Vスペクトル比の比較から、通潤橋とK-NET矢部は直線距離にして約0.9kmしか離れていないにも関わらず、振動特性が異なっていることがわかった。したがって、両地点での地震動も異なっている可能性があることから、2通りの方法で通潤橋地点の推定地震動を作成し、解析に用いた。推定地震動1は、K-NET矢部のボーリングデータを用いて次元重複反射理論により推定したK-NET矢部の基盤面地震動である。推定地震動2は、微動のH/Vスペクトル比を用いて振幅を補正した推定地震動である。

構築した解析モデルに、観測地震動と、2通りの推定地震動を入力した地震応答解析を行った。観測地震動を直接入力したところ、実被害をかなり過大評価する結果となり、実現象との比較からもK-NET矢部で観測された地震動は通潤橋に作用した地震動と異なっていることが示唆された。推定地震動1を入力した場合も、実際の被害を過大評価する結果となった。推定地震動2を用いた場合は、手摺石が落下しないこと、アーチ端部と橋端部の間で壁石のはらみ出しが大きくなるという特徴を再現することができた。これは、推定地震動2が、アーチ中央部よりも、アーチ端部と橋端部の間で揺れやすい振動数が卓越しているためであることがわかった。

また漸増動的解析を行ったことにより、通潤橋の手摺石は推定地震動2の約1.35倍程度の地震動が作用すると落下してしまう可能性があり、余裕のない結果となった。一方でアーチ構造については、推定

地震動 2 の約 5 倍の地震動まで耐えられる結果となり、アーチ本体は熊本地震に対して十分な耐震性能を有していたと考えられる。

本研究の解析結果から、地震動の振動特性によって石橋の被害推定結果と弱点箇所が大きく異なることがわかったことから、地震動の精度と解析モデルの振動特性の再現性が重要であることがわかった。

謝辞

本研究の実施にあたり、大津山恭子氏をはじめとする山都町教育委員会の皆様に大変お世話になりました。防災科学技術研究所の K-NET の記録を使用させて頂きました。立命館大学の伊津野和行先生には、貴重な資料をご提供いただきました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

1. 熊本県山都町：重要文化財 通潤橋 保存活用計画，2015.
2. 熊本県山都町：国指定重要文化財「通潤橋」の被災状況と復旧工事の見通しについて，http://www.town.kumamoto-yama-to.lg.jp/life/pub/detail.aspx?c_id=46&type=top&id=613 (2018 年 9 月 7 日閲覧).
3. 熊本県山都町：重要文化財「通潤橋」保存修理工事 (2) 石橋の修理を行いました，http://www.town.kumamoto-yama-to.lg.jp/life/pub/Detail.aspx?c_id=46&id=945&pg=1&type=list (2018 年 9 月 7 日閲覧)
4. 熊本県山都町：平成 28 年 4 月 14 日・16 日発生 熊本地震による通潤橋への影響 (山都町提供資料)
5. 伊津野 和行, 石田 優子, 藤本 将光, 深川 良一：通潤橋の地震応答特性に関する研究，土木学会論文集 A1 (構造・地震工学)，Vol.73, No.4, pp.1-8, 2017.
6. 国立研究開発法人 防災科学技術研究所：強震観測網 (K-NET, KiK-net)，<http://www.kyoshin.bosai.go.jp/kyoshin/>(2018 年 9 月 7 日閲覧)
7. 萩原 一帆, 伊津野 和行：平成 28 年熊本地震による通潤橋の地震応答と耐震補強に関する研究，歴史都市防災論文集，Vol.11, pp.71-78, 2017.
8. Aiko Furukawa, Junji Kiyono, and Kenzo Toki：Proposal of a Numerical Simulation Method for Elastic, Failure and Collapse Behaviors of Structures and its Application to Seismic Response Analysis of Masonry Walls, Journal of Disaster Research, Vol.6, No.1, 2011.
9. 熊本県矢部町 (現山都町)：昭和五十九年三月重要文化財通潤橋保存修理工事報告書，1984.
10. 中村 真貴, 原田 隆典, 市村 彰, 王 宏沢, 齊藤 将司：常時微動 H/V スペクトル比を利用した強震観測点近傍の地震動推定手法，第 30 回土木学会地震工学研究発表会論文集，2009.
11. 国土地理院：地理院地図，<https://maps.gsi.go.jp/#16/32.682441/130.991943/&base=std&ls=std&disp=1&vs=c1j010u0t0z0r0f0> (2017 年 07 月 12 日閲覧).
12. P.A.Cundall：Formulation of a Three-dimensional distinct element model-Part I.A scheme to detect and represent contacts in system composed of many polyhedral blocks, Int. J. Rock Mech. Min. Sei. & Geomech. Vol.25, No.3, pp.107-116, 1988.
13. 浅井 光輝, 山下 和也, 山崎 礼智, 荒木 和哉：離散型有限要素モデルによる石造アーチ橋の静的・動的強度評価，構造工学論文集，Vol.55A, pp.172-180, 2009.
14. 日本建築学会：特殊コンクリート造関係設計規準・同解説，1964.
15. 吉田 望, 末富 岩雄：DYNEQ：等価線形法に基づく水平成層地盤の地震応答解析プログラム，佐藤工業 (株) 技術研究所報，No. 22, pp.61-70, 1996.
16. PWRI：Numerical analysis of earthquake response of ground, Report of PWRI, No. 1778, pp.1-47, 1982.
17. Vamvatsikos, D. and Cornell, C.A.：Incremental Dynamic Analysis, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.31, No.3, pp.491-514, 2002.
18. 谷口 惺, 五十嵐 晃, 木田 秀人：漸増動的解析 (IDA) に基づく長大橋の耐震性能評価，土木学会論文集 A1 (構造・地震工学)，Vol.70, No.4, pp.323-333, 2014.